2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক

বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলি

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর $x=\frac{1}{2}vt$, গতির নিয়মে চলে, যেখানে v হল t সময়ে বেগ, তাহলে ত্বরণ f হল

(অ) ধ্রুবক (আ) $f \propto x$ (ই) $f \propto -x$ (ঈ) $f \propto 1/x$।

(খ) নিম্নের কোনটি সঠিক?

(অ) Power = Force/velocity (আ) Power = Force × velocity

(ই) Power = Force × (velocity)^2 (ঈ) None of these।

(গ) m-ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। যদি বস্তুকণাটি 'a' দূরত্বে স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে t সময়ে তার গতিবেগ হবে,

(অ) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2}-x^2\right)^{1/2}$ (আ) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^4}+x^2\right)^{1/2}$ (ই) $\sqrt{\mu}\left(-\frac{a^4}{x^2}+x^2\right)^{1/2}$ (ঈ) $-\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2}-x^2\right)^{1/2}$।

(ঘ) যদি I ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ u থেকে v তে পরিবর্তিত হয়, তবে গতিশক্তি পরিবর্তনের মান হবে

(অ) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (আ) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (ই) $2I(u+v)$ (ঈ) $2I(u-v)$।

(ঙ) u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণার সর্বাধিক অনুভূমিক সীমা হবে,

(অ) $\frac{u}{g}$ (আ) ug (ই) $\frac{u^2}{g}$ (ঈ) $\frac{g}{u^2}$।

(চ) যদি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোন গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি শঙ্কুচ্ছেদ $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ হয়, তবে বল সরলভেদে থাকবে

(অ) $\frac{1}{r^2}$ (আ) r^2 (ই) $\frac{1}{r}$ (ঈ) $\frac{1}{r^3}$-এর সঙ্গে।

(ছ) যদি একটি বস্তুকণার ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশ এবং স্পর্শক উপাংশ সমান হয়, তবে গতিবেগ সমানুপাতিক হবে

(অ) ψ (আ) e^{ψ}

(ই) $e^{2\psi}$ (ঈ) $e^{-\psi}$-এর সঙ্গে, যেখানে $\tan\psi$ = স্পর্শকের নতি।

(জ) 10,000 গ্রাম ওজনের একটি কামানের গোলা 5000 সে.মি./সেকেন্ড গতিতে ছোঁড়া হলে তার গতিশক্তি আর্গে হবে

(অ) 100×10^9 আর্গ (আ) 125×10^9 আর্গ (ই) 200×10^9 আর্গ (ঈ) 25×10^{10} আর্গ।

(ঝ) একটি স্থির বিন্দুমুখী বল, $\frac{\mu}{r^2}$ (প্রতি ভরের এককে), দ্বারা চালিত একটি কণার পথ অধিবৃত্ত হবে যদি

(অ) $V^2<\frac{2\mu}{r}$ (আ) $V^2=\frac{2\mu}{r}$ (ই) $V^2>\frac{2\mu}{r}$ (ঈ) $V^2=\frac{\mu}{r}$ ।

(V প্রারম্ভিক গতিবেগ)

(ঞ) t কে v-এর আপেক্ষক ধরা হলে, ত্বরণ f-এর হ্রাসের হার হয়

(অ) $f^3\frac{d^2t}{dv^2}$ (আ) $f^2\frac{d^2t}{dv^2}$ (ই) $f\frac{d^2t}{dv^2}$ (ঈ) $\frac{d^2t}{dv^2}$ ।

২। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×১

(ক) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা mn^2x আকর্ষণ বলের অধীনে একটি সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে অভিমুখী হয় যেখানে x হল ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্ব। যদি কণাটি ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে প্রারম্ভিক a দূরত্ব থেকে V গতিবেগে বলের কেন্দ্রের অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে, কণাটি বলের কেন্দ্রে $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$ সময় পরে পৌঁছবে।

(খ) অরীয় বেগ এবং ত্বরণের উপাংশ নির্ণয় করো।

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের কার্যের হার ধ্রুবক এবং x দূরত্ব অতিক্রম করতে বলটি কণার গতিবেগকে u থেকে v তে পরিবর্তিত করে। প্রমাণ করো যে ওই দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির $\frac{3(u+v)x}{2\left(u^2+uv+v^2\right)}$ সময় লাগবে। ১০

৪। সরল দোলনগতি সম্পন্ন একটি কণার মধ্যবিন্দু থেকে পরপর 3 সেকেন্ডে দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হলে দেখাও যে সব পর্যায়কাল $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)}$। ১০

৫। একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে তার নাভি অভিমুখে প্রতি একক ভরের $\mu/(\text{দূরত্ব})^2$ বলের অধীনে চলছে। যদি কণাটি বলকেন্দ্র থেকে R দূরত্বে V গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে কণাটির পর্যায়কাল $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\dfrac{2}{R}-\dfrac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$। ১০

৬। একক ভরের একটি বস্তুকণাকে দিগন্তের উপরে α কোণে V বেগে প্রক্ষিপ্ত করা হল যে মাধ্যমে তার বাধা বস্তুকণার গতিবেগের k গুণ। প্রমাণ করো যে $\dfrac{1}{k}\log\left(1+\dfrac{kV}{g}\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)$ সময় পরে বস্তুকণাটির বেগের অভিমুখ দিগন্তের উপর $\dfrac{\alpha}{2}$ কোণ উৎপন্ন করবে। ১০

৭। যদি কোনো গ্রহ তার বৃত্তাকার কক্ষপথের কোনো এক জায়গায় হঠাৎ থেমে যায় তবে প্রমাণ করো যে গ্রহটি যে সময়ে সূর্যের উপর পতিত হবে তা গ্রহটির আবর্তকালের $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ গুণ। ১০

৮। একটি বস্তুকণা একটি পথে ধাবমান যেখানে ত্বরণ $\dfrac{\mu}{y^3}$, যা সব সময় Y-অক্ষের সমান্তরাল এবং X-অক্ষের অভিমুখী। যদি ওই বস্তু কণাটিকে $(0, a)$ বিন্দু হতে X-অক্ষের সমান্তরাল দিকে $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a}$ বেগে ছোড়া হয় তবে দেখাও যে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি বৃত্ত হবে। ১০

৯। একটি ঋজু মসৃণ নল ω কৌণিক গতিবেগে আবর্তিত হয়, নলটির দৈর্ঘ্যের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু O-এর সাপেক্ষে। O অভিমুখী একটি বল $m\mu$(দূরত্ব)-এর প্রভাবে ওই নলের মধ্যে দিয়ে বিশ্রাম অবস্থায় থাকা একটি কণা পতনশীল হয়। দেখাও যে কণাটির যাত্রাপথের সমীকরণ হল $r = a\cos h\left(\sqrt{\dfrac{\omega^2-\mu}{\omega^2}}\,\theta\right)$ অথবা $r = a\cos\left(\sqrt{\dfrac{\mu-\omega^2}{\omega^2}}\,\theta\right)$, যখন $\mu \gtrless \omega^2$। $\mu = \omega^2$ হলে দেখাও যে যাত্রাপথটি বৃত্তাকার হবে। ১০

১০। (ক) কেপলারের তৃতীয় সূত্রটি লেখো।

(খ) কেন্দ্রীয় বল F (প্রতি একক ভরে) অধীনে গতিশীল একটি বস্তুর ক্ষেত্রে দেখাও যে $\dfrac{h^2}{p^3}\dfrac{dp}{dr} = F$।

(প্রতীকগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ) ২+৮

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Multiple Choice Questions.

1. Answer ***all*** the questions : 1×10

(a) If a particle moves in a straight line and the distance x from the fixed point at any time t is $x=\frac{1}{2}vt$, where v is the velocity at the time t, then acceleration f is

(i) constant (ii) $f \propto x$ (iii) $f \propto -x$ (iv) $f \propto 1/x$.

(b) Which of the following is correct?

(i) Power = Force/velocity (ii) Power = Force × velocity

(iii) Power = Force × (velocity)^2 (iv) None of these.

(c) A particle of mass m is acted on by force $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$ towards the origin. If it starts from rest at a distance a, then its velocity at time t

(i) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2}-x^2\right)^{1/2}$ (ii) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^4}+x^2\right)^{1/2}$ (iii) $\sqrt{\mu}\left(-\frac{a^4}{x^2}+x^2\right)^{1/2}$ (iv) $-\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2}-x^2\right)^{1/2}$.

(d) For a rectilinear motion of a particle, if an impulse I changes its velocity from u to v, then the change in Kinetic energy is

(i) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (ii) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (iii) $2I(u+v)$ (iv) $2I(u-v)$.

(e) The maximum horizontal range of a particle with initial velocity u is given by

(i) $\frac{u}{g}$ (ii) ug (iii) $\frac{u^2}{g}$ (iv) $\frac{g}{u^2}$.

(f) If the central orbit described by a particle moving under central force is the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$, then the force varies as

(i) $\frac{1}{r^2}$ (ii) r^2 (iii) $\frac{1}{r}$ (iv) $\frac{1}{r^3}$.

(g) If the tangential and normal components of acceleration be equal, then the velocity is proportional to

(i) ψ (ii) e^{ψ} (iii) $e^{2\psi}$ (iv) $e^{-\psi}$.

where tan ψ = slope of the tangent.

(h) The kinetic energy in ergs of a cannon ball of 10,000 grammes discharged with a velocity of 5000 cm/second is

(i) 100×10^9 ergs (ii) 125×10^9 ergs (iii) 200×10^9 ergs (iv) 25×10^{10} ergs.

(i) A particle moves under a force which is always directed towards a fixed point and is equal to $\frac{\mu}{r^2}$ per unit mass, then its path will be a hyperbola if

(i) $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ (ii) $V^2 = \frac{2\mu}{r}$ (iii) $V^2 > \frac{2\mu}{r}$ (iv) $V^2 = \frac{\mu}{r}$.

(V is the initial velocity)

(j) If t be regarded as a function of velocity v, then the rate of decrease of acceleration f is

(i) $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$ (ii) $f^2 \frac{d^2t}{dv^2}$ (iii) $f \frac{d^2t}{dv^2}$ (iv) $\frac{d^2t}{dv^2}$.

2. Answer ***any one*** from the following : 5×1

(a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity V towards the centre of force from an initial distance a then prove that it reaches the centre of force after a time $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$.

(b) Deduce expressions for radial velocity and radial accelerations.

Answer ***any five*** questions.

3. A particle moving in a straight line is acted on by a force which works at a constant rate and changes its velocity from u to v in passing over a distance x. Prove that the time taken is $\frac{3(u+v)x}{2\left(u^2+uv+v^2\right)}$. 10

4. In an SHM the distance of a particle from the middle point its path at three consecutive seconds are x, y, z respectively. Show that the time period is $\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)}$. 10

5. A particle describes an ellipse under a force $\mu/(\text{distance})^2$ towards a forces. If it was projected with a velocity V from a point distant R from the centre of force, then show that the periodic time is 10

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{R}-\frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$$

Please Turn Over

6. A particle of unit mass is projected with a velocity V at an angle α above the horizon in a medium whose resistance is k times the velocity of the particle. Prove that the direction of its velocity will make an angle $\frac{\alpha}{2}$ above the horizon after a time $\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{kV}{g}\tan\frac{\alpha}{2}\right)$. 10

7. If a planet was suddenly stopped in its orbit supposed circular then prove that it would fall into the Sun in a time which is $\frac{\sqrt{2}}{8}$ times the period of the planet's revolution. 10

8. A particle describes a path with an acceleration $\frac{\mu}{y^3}$ which is always parallel to the axis of Y and directed towards the X-axis. If the particle be projected from a point (0, a) with the velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ parallel to X-axis, show that the path described is a circle. 10

9. A particle falls from rest within a straight smooth tube which is revolving with uniform angular velocity ω about a point O in its length, being acted on by a force equal to $m\mu$(distance) towards O. Show that the equation to its path in space is $r = a\cos h\left(\sqrt{\frac{\omega^2-\mu}{\omega^2}}\,\theta\right)$, or, $r = a\cos\left(\sqrt{\frac{\mu-\omega^2}{\omega^2}}\,\theta\right)$ according as $\mu \gtrless \omega^2$. If $\mu = \omega^2$, show that the path is a circular. 10

10. (a) Write down Kepler's third Law.

(b) Establish the relation $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$ for a central orbit under an attractive force F per unit mass. [Symbols have their usual meaning] 2+8